সমান্তরাল

ইউক্লিড

“ জ্ঞানার্জনের জন্য রাজকীয় পথ বলে কিছু নেই

আবৃত্তাংশ | অনুসমতা | সংখ্যা পদ্ধতি

ইউক্লিডিয়ান অ্যালগরিদম | পাওয়ার অফ পয়েন্ট

সমান্তরাল

জানুয়ারি ২০২৪, পৌষ-মাঘ ১৪৩০ বঙ্গাব্দ

সম্পাদনা

টিম সমান্তরাল

প্রচ্ছদ

মোঃ ইব্রাহিম

লে আউট

খালেদ মাহমুদ সম্রাট

মোঃ ইব্রাহিম

প্রকাশক

টিম সমান্তরাল

টাইপিং ও প্রুফ রিডারে যারা ছিলেন

তনয় পাল

মোঃ মিজানুর রহমান রাফি

মেহেরা তানজীম মিম

নির্মল মিস্ত্রি

রাহাত মোবাশ্বির

সামিউল হক শিশির

জুবায়ের আল মামুন

বিনতে আব্দুর রাকিব

নাহিদ হাসান এমিলি

নিশাত তাসনিম নৌসি

মাহিদ হাসান আদিত্য

সহযোগী

মেজবাতুর রহমান নিলয়

ফাউন্ডার, বাংলাদেশ অলিম্পিয়াড প্রাক্টিস

এডিটরদের কথাঃ

তনয় পাল (১০ম শ্রেণী, রাজধানী উচ্চ বিদ্যালয়)-

"যখন ফেসবুকে দেখলাম যে সমান্তরাল মাগাজিনের জন্য ভলিন্টিয়ার নিবে, তখনি সাথে সাথে এপ্লাই করি। উদ্দেশ্য একটাই যে, একটা ম্যাগাজিনে নিজেকে কাজে লাগানো। একটু নার্ভাস ছিলাম যে ঠিকমতো করতে পারব কিনা, কিন্তু ভাইয়ারা এতটাই বন্ধুসুলভ যে আমার সব নার্ভাসনেস চলে গেল। আমি কাজ শেষ করে অপেক্ষায় ছিলাম যে কবে বের হবে। অবশেষে আমার অপেক্ষা শেষ হল। প্রকাশিত হল প্রথম ম্যাগাজিন যেখানে আমি কাজ করেছি। আমি সম্পূর্ণ টিম কে ধন্যবাদ জানাতে চাই প্রতিযোগীদের এত সুন্দর গোছানো ম্যাগাজিন দেয়ার জন্য এবং আমি সহ অনেককে নিজেদের কাজের এক্সপেরিএন্স বাড়ানোর জন্য। জয়তুঃ সমান্তরাল, জয়তুঃ গণিত উৎসব।"

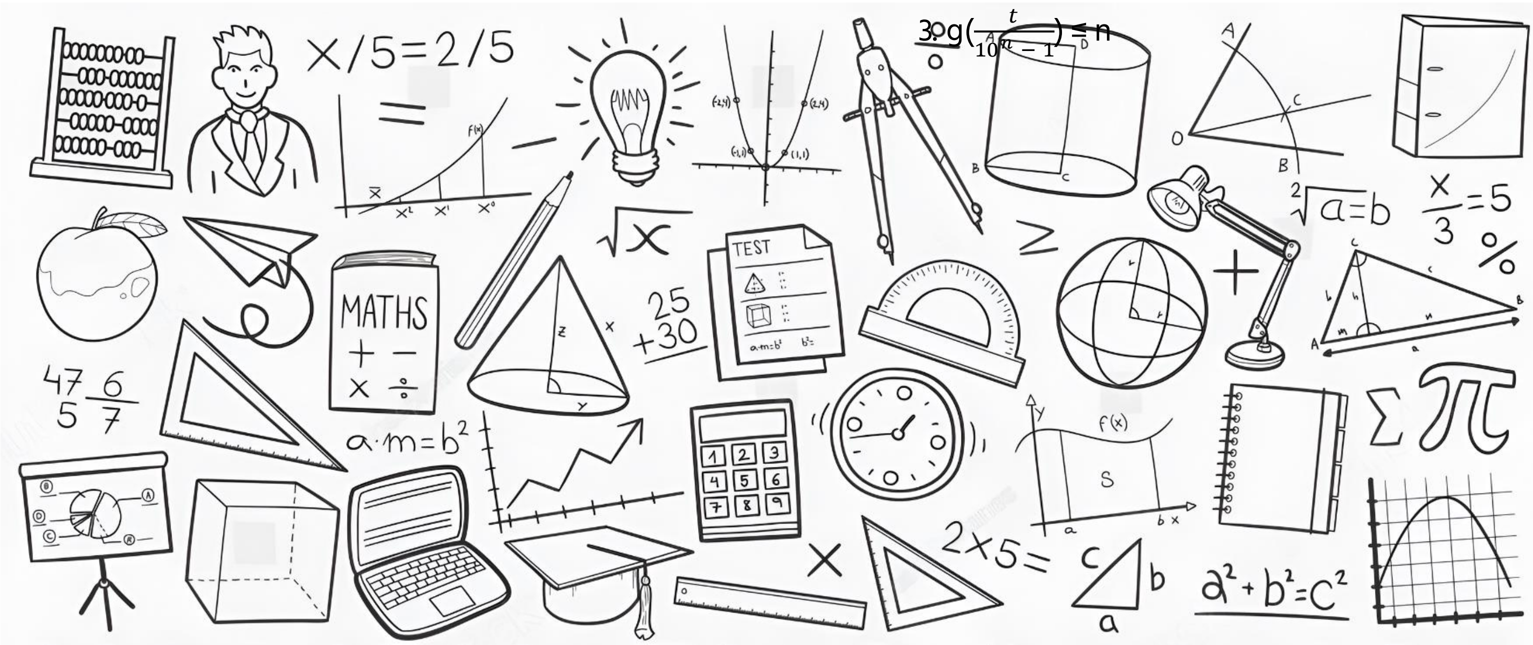
মোঃ ইব্রাহীম (অষ্টম শ্রেণি, খুলনা জিলা স্কুল)-

"আচ্ছা কেমন হতো যদি গণিতের একটা অনলাইন ম্যাগাজিন পড়তে পারতাম? কেমন হতো যদি এই বাংলার গণিতের সম্রাটদের লেখাগুলো নিজের চোখে দেখতে পারতাম? আমার মতো এমন ভাবনা হয়তো জেগেছে তোমাদের মনেও। এমন ভাবতে ভাবতে আজ তোমাদের মাঝে এসে গেল সেই বহু আকাঙ্খিত 'সমান্তরাল' গণিতের ম্যাগাজিন। গণিতের সপ্নযাত্রায় যেন চিরকাল সমান্তরাল তোমাদের সঙ্গীহয়ে থাকতে পারে সেই কামনা করি।"

রাহাত মুবাশ্বির (সবুজবাগ সরকারি কলেজ,ঢাকা)-

"গণিত ও বিজ্ঞান ভিত্তিক সবরকমের কাজেই আমার আগ্রহ অনেক বেশি। সুযোগ যখন এলো "সমান্তরাল" ম্যাগাজিনে কাজ করার ,আমি সুযোগটা কাজে লাগালাম । ইচ্ছা ছিল নিজের দক্ষতা বৃদ্ধির । যদিও সময়ের অভাবে তেমন কোনো উল্লেখযোগ্য ভূমিকা রাখতে পারিনি ,তারপরও অনেক কিছু শিখেছি সমান্তরাল ম্যাগাজিন টীমের সাথে কাজ করে । সমান্তরাল ম্যাগাজিনের জন্য অনেক শুভকামনা।"

সূচিপত্রঃ



3. $g(\frac{t}{10^n - 1}) \leq n$

আবৃত্তাংশ

আমরা এই অধ্যায়ে প্রমাণ করবো যে, কোনো ভগ্নাংশের আবৃত্তাংশের অঙ্ক সংখ্যা এর হরে থাকা সংখ্যার থেকে ছোট।

Notation & Convention:

- কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা n এর অঙ্কসংখ্যা f(n)।
- কোনো ভগ্নাংশের আবৃত্তাংশের অঙ্কসংখ্যা $g(\frac{j}{k})$।
- আলোচনাধীন সকল চলক স্বাভাবিক সংখ্যা।
- abc বলতে পাশাপাশি একই ক্রমে a, b এবং c এই তিনটি অঙ্কের অবস্থান বোঝানো হয়।

যেমনঃ abc = 573 হলে a = 5, b = 3, c = 7

কিছু উপপ্রমাণঃ

1. $\frac{j}{k} = x_1 \dots x_s\, y_1 \dots y_m\, z_1 \dots z_n$ হলে,

$g(\frac{j}{k}) \leq n$

প্রমাণঃ trivial (স্বভাবতই বোঝা যায়)।

2. $\frac{j}{k} = r + \frac{p}{q}$ হলে,

$g(\frac{j}{k}) = g(\frac{p}{q})$

প্রমাণঃ trivial

প্রমাণঃ

Case 1: f(t) = n

$\therefore \frac{t}{10^n - 1} = \frac{d_1 \dots d_n}{10^n - 1}$

$= \frac{d_1 \dots d_n\, d_1 \dots d_n - d_1 \dots d_n}{10^n - 1}$

$= \frac{d_1 \dots d_n\,(10^n - 1)}{10^n - 1}$

$= d_1 \dots d_n$

$\therefore g(\frac{t}{10^n - 1}) = g(d_1 \dots d_n) \leq n$

Case 2: f(t) < n

$\therefore \frac{t}{10^n - 1} = \frac{d_1 \dots d_n}{10^n - 1} = \frac{0 \dots 0\, d_1 \dots d_{n-2}}{10^n - 1} = 0 \dots 0\, d_1 \dots d_{n-2}$

$\therefore g(\frac{t}{10^n - 1}) = g(0 \dots 0\, d_1 \dots d_{n-2}) \leq n$

উপপ্রমাণ 2 ব্যবহার করে f(t) > n কেসটি solve করা যায়।

কেননা f(t) > n হলে,

$\frac{t}{10^n - 1} = n + \frac{i}{10^n - 1}$, যেখানে f(i) ≤ n

$\therefore g(\frac{t}{10^n - 1}) = g(n + \frac{i}{10^n - 1}) = g(\frac{i}{10^n - 1}) \leq n$

$\therefore g(\frac{t}{10^n - 1}) \leq n$ উক্তিটি সকল t এর জন্য সত্য।

4.

যদি x , 2 এবং 5 দ্বারা বিভাজ্য না হয়, তাহলে এমন n এর অস্তিত্ব আছে যেন n < x এবং $x | 10^n - 1$ ।

প্রমাণঃ

$2 \nmid x$ এবং $5 \nmid x$

$\therefore (x, 10^a) = 1$ [তারা সহমৌলিক]

ধরি, x < a < b,

প্রথমত, $10^a - 1 \equiv x - 1 \ (mod\, x)$ হলে,

$10^a \equiv 0 (mod\, x)$ যা অসম্ভব অর্থাৎ $10^a - 1 \not\equiv x - 1 \ (mod\, x)$

দ্বিতীয়ত, $10^a - 1 \equiv 10^b - 1 \ (mod\, x)$ হলে,

$10^{a-b} \equiv 1 \ (mod\, x)$ [$x \perp 10^b$]

$\Rightarrow 10^{a-b} - 1 \equiv 0 \ (mod\, x)$

অর্থাৎ যদি x দিয়ে ভাগ করার পর, { $10^1 - 1, 10^2 - 1, 10^3 - 1, 10^4 - 1, 10^5 - 1, \ldots, 10^{x-1} - 1$ } এর দুই সদস্য থেকে এক ভাগ পাওয়া গেলে উক্তিটি প্রমাণিত কেননা , a-b < a < x ।

আবার যদি পুনরাবৃত্তি না হয় তাহলে { $10^1 - 1, 10^2 - 1, \ldots, 10^{x-1} - 1$ } এই সেটের x - 1 টির জন্য { 0, 1, 2, ….. , x-2 } এই সেটের x - 1 টি ভাগশেষ 1 বার করে পাওয়া যাবে, অর্থাৎ 0 পাওয়া যাবে। উল্লেখ্য, ভাগশেষ এর সেটে x - 1 থাকবে না।

(প্রমাণিত)

<u>মূল প্রমাণঃ</u>

ধরি, ভগ্নাংশটি $\frac{j}{k}$,

মনে করি,

$k = 2^a \times 5^b \times x$ [$2 \nmid x$ এবং $5 \nmid x$]

$\therefore 2^{u-a} \times 5^{u-b} \times k = 10^u \times x$ ………… (i) [যেকোনো u নেওয়া যায় যেখানে u > a, b]

আবার,

এমন v বিদ্যমান যেন v < x ≤ k এবং $\frac{10^2 - 1}{x} = h$

$\therefore 10^2 - 1 = hx$ [উপপ্রমান 4]

$(i) \times h \Rightarrow 2^{u-a} \times 5^{u-b} \times k \times h = 10^u \times h \times x = 10^u(10^v - 1)$

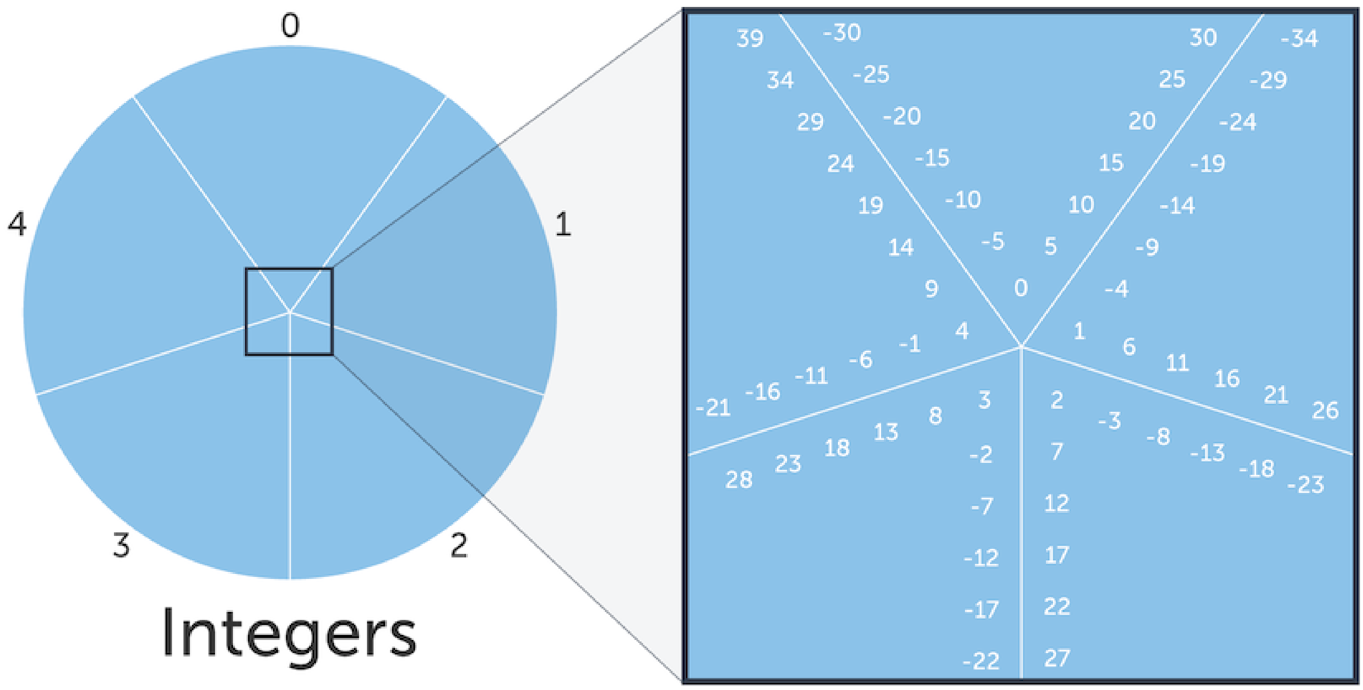
$\frac{j}{k} = \frac{j \times 2^{u-a} \times 5^{u-b} \times h}{k \times 2^{u-a} \times 5^{u-b} \times h} = \frac{j \times 2^{u-a} \times 5^{u-b} \times h}{10^u(10^v - 1)}$

$\therefore g(\frac{j}{k}) = g(\frac{j \times 2^{u-a} \times 5^{u-b} \times h}{10^u(10^v - 1)}) = g(\frac{j \times 2^{u-a} \times 5^{u-b} \times h}{10^v - 1}) \leq v < k$

$\therefore g(\frac{j}{k}) < k$

(প্রমাণিত)

দেবপ্রিয় সাহা রায়
দ্বাদশ শ্রেণী
নটরডেম কলেজ, ঢাকা



অ ণু স ম গ ণি ত

নাম্বার থিয়োরি ভালোবাসেন কিন্তু **কনগ্রুয়েন্স** বা **অনুসমতা** সম্পর্কে ধারণা নেই এমন মানুষ একটিও সম্ভবত এই ধরাধামে খুঁজে পাওয়া যাবে না। কারণ ক্লাসিক্যাল নাম্বার থিয়োরির খুব বড় একটি অংশই যে রয়েছে এই মডুলার এরিথম্যাটিকের দখলে।

এবার ভূমিকা ছেড়ে মূল আলোচনায় আসা যাক। a এবং b সংখ্যা দুটিকে যদি দ্বারা ভাগ করে একই ভাগশেষ পাওয়া যায় তবে বলা হয় a এবং b হচ্ছে ভাজকের সাপেক্ষে অনুসম বা কনগ্রুয়েন্ট। কিংবা গণিতের ভাষায় $a \equiv b \pmod{c}$ পড়তে হয় 'a is congruent to b modulo c'

সমীকরণ আর **কনগ্রুয়েন্স** সহোদর না হলেও মাসতুতো-পিসতুতো ভাই কিনা, তাই দুজনের স্বভাব-চরিত্রে ভীষণ মিল। কনগ্রুয়েন্সের চিহ্নটার কথাই ধর না, '=' চিহ্নের সাথে মিল রেখে সেটা হয়েছে কেমন '≡'

শুধু এইটুকুতে সন্তুষ্ট না হলে চল কনগ্রুয়েন্সের আরও কিছু বৈশিষ্ট্য এই ফাঁকে দেখে নেই।

১) $a \equiv a \pmod{c}$

২) $a \equiv b \pmod{c}$ হলে $b \equiv a \pmod{c}$

৩) $a \equiv b \pmod{c}$ এবং $b \equiv d \pmod{c}$ হলে $a \equiv d \pmod{c}$

8) $a \equiv b+d \pmod{c}$ হলে $a - b \equiv d \pmod{c}$

৫) $a \equiv b \pmod{c}$ হলে যেকোনো পূর্ণসংখ্যা d-র জন্য $a + d \equiv b + d \pmod{c}$ এবং $ad \equiv bd \pmod{c}$

৬) a ≡ b (mod c) হলে $a^n \equiv b^n$ (mod c) যেখানে n∈N

৭) যদি a-কে c দ্বারা ভাগ করে d ভাগশেষ থাকে তবে কিন্তু লেখা যায় a ≡ d (mod c) কারণ d = 0 x c + d অর্থাৎ d-কে দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ থাকে d !!!

৮) a ≡ b (mod c) হলে a + c ≡ b (mod c) (এবং সাধারণভাবে a + kc ≡ b (mod c) যেখানে k ∈ Z)

লক্ষ কর যে (mod c)-র অংশটুকু 'হলে'-র আগে ও পরে একই থেকেছে, একটুও পাল্টায়নি। মূল হিসেবে অংশ নেয় না বলেই হয়ত একে বন্ধনী দিয়ে আলাদা করে রাখা হয়। সমীকরণ আর কনগ্রুয়েন্সের সম্পর্ক এখানেই শেষ নয়; দুটো সমীকরণের মত দুটো কনগুয়েন্সকেও যোগ, বিয়োগ বা গুণ করা যায়। অর্থাৎ যদি a ≡ b (mod c) এবং একইসাথে e ≡ f (mod c) হয় তাহলে,

$$a + e \equiv b + f (mod\ c);\ \ a - e \equiv b - f (mod\ c);\ \ \ ae \equiv bf (mod\ c)$$

আর এক্ষেত্রেও খেয়াল রাখতে হবে যাতে সবগুলো কনগ্রুয়েন্সের (mod c) অংশে c-র মান অভিন্ন থাকে। নয়ত বিরাট গণ্ডগোল পাকিয়ে যেতে পারে।

সমীকরণের সাথে কনগ্রুয়েন্সের কিছু পার্থক্যও আছে। যেমন, এখানে আমরা ধুম-ধাম ভাগ করতে পারি না, একটু বুঝেশুনে করতে হয়। কনগ্রুয়েন্সে ভাগ দুই ভাবে করা যায়:

১. am ≡ bm (mod c) এবং m, c সহমৌলিক হলে বলা যায় a ≡ b (mod c)

২. am ≡ bm (mod cm) থেকে লেখা যায় a ≡ b (mod c)

এতক্ষণ তো শুধু 'উপদেশ' দিয়ে গেলাম, এবার কাজে না নামলে কি হয়? চল কনগ্রুয়েন্সের কয়েকটা সমস্যায় এবার দাঁত বসিয়ে দেখা যাক কেমন লাগে।

সমস্যা ১: ডানদিক থেকে 3^{105} এর প্রথম অঙ্ক দুটি কত?

সমাধান: নিশ্চয়ই অবাক লাগছে যে এই সমস্যায় কনগ্রুয়েন্স এল কোথা থেকে। কিন্তু লক্ষ করে দেখ কোনো সংখ্যাকে 100 দ্বারা ভাগ করলেই কিন্তু ডান দিকের প্রথম দুটি অঙ্ক ভাগশেষে বের হয়ে আসে। (যেমন, 1298-এর ক্ষেত্রে ভাগশেষ 98) তাই এখানে আসলে জানতে চাওয়া হয়েছে 3^{105}-কে 100 দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ কত থাকবে। তাহলে আমাদের কাজটা কী দাঁড়ালো? 3^{105} ≡ ? (mod 100)-এই কনক্রয়েন্সে '?' চিহ্নের জায়গায় শর্ত পূরণ করে এমন ক্ষুদ্রতম ধ্বনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা বসানো। লক্ষ্য কর 243 ≡ 43 (mod 100). সুতরাং $3^{105} \equiv 243^{21} \equiv 43^{21}$ (mod 100). আবার দেখ 43^{21} = 43 × 43^{20} = 43 × 1849^{10} , আমরা জানি 1849 ≡ 49 (mod 100). তাহলে আগের মত লেখা যায় 43 x 1849^{10} ≡ 43 x 49^{10} (mod 100). বাকি অংশটুকু আমি আর ব্যাখ্যা করে বললাম না। আশা করি আগের দুই বারের থেকে বুঝে নেবে। 43 x 49^{10}= 43 × 2401^5 ≡ 43 × 1^5 = 43 (mod 100).

এবার পুরো জিনিসটাকে গুছিয়ে লেখা যাক।

$3^{105} \equiv 43^{21} \equiv 43 \times 49^{10} \equiv 43 \times 1^5 \equiv$ 43 (mod 100)

তাহলে ৩ নং বৈশিষ্ট্য থেকে আমরা বলতে পারি $3^{105} \equiv$ 43 (mod 100). অতএব অঙ্ক দুইটি 3 এবং 4. এবার একইভাবে বের করতে পার 4^{2012} -কে 17 দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ কত থাকে।

তোমাদের বোঝানোর জন্য আমি এখানে বিস্তারিতভাবে লিখেছি। অলিম্পিয়াডে কিন্তু শর্টকাটে কাজ চালানো জায়েজ। যেমন এই প্রশ্নটাই আমি অলিম্পিয়াডে করলে শুধুমাত্র শেষের ঐ বিশাল জটিল এক লাইনই লিখতাম।

সমস্যা ২: 4a + 3b ≡ 1 (mod 5) এবং b ≡ 2 (mod 3) হলে 3a + b-কে 5 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?

সমাধান: এখানে মূল সমস্যা হচ্ছে দুটো কনগ্রুয়েন্সে ভাজক ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যা। তাই কনগ্রুয়েন্স যোগ, বিয়োগ ইত্যাদি নিয়মের কোনটাই এখানে সরাসরি ব্যবহার করা যাবে না। তবে এক্ষেত্রে কনগ্রুয়েন্সের ভাগের দুই নং নিয়মটি আমাদের বাঁচিয়ে দিতে পারে।

4a+3b ≡ 1 (mod 5) ⇔ (4a + 3b)3 ≡ 3 (mod 5 × 3) ⇔ 12a+9b ≡ 3 (mod 15)

b ≡ 2 (mod 3) ⇔ 5b ≡ 2 x 5 (mod 3 x 5) 5b ≡ 10 (mod 15)

প্রথম কনগ্রুয়েন্সে এই 5b-র মান বসিয়ে দাও। এভাবে আমরা পাচ্ছি-

12a +9b ≡ 12a +4b + 10 ≡ 3 (mod 15) ⇔ 12a + 4b ≡ -7 ≡ 8 (mod 15)

যেহেতু 4 এবং 15 সহমৌলিক, সেজন্য ১ নং ভাগের নিয়ম থেকে আমরা বলতে পারি 3a + b ≡ 2 (mod 15) আবার 15 নিজেই যেহেতু 5 দ্বারা বিভাজ্য, তাই লেখা যায়, 3a + b ≡ 2 (mod 5) অর্থাৎ ভাগশেষ 2। নতুনদের একটা জিনিসে খটকা লাগতে পারে যে আমার -7 ≡ 8 (mod 15) লেখাটা ঠিক হল কিনা। তাদের বলছি এটা সম্পূর্ণ সঠিক কেননা আমরা জানি 0 ≡ 7+ 8 (mod 15) এবার 8 নং বৈশিষ্ট্য থেকে এটা আসে।

সমস্যা ৩: এমন সব ধ্বনাত্মক পূর্ণসংখ্যা x ও y বের কর যাতে করে নিচের সমীকরণটি সিদ্ধ হয়:

$$5^x - 1 = 7^y + 1$$

সমাধান: 5 ≡ -1 (mod 3) ⇒ 5^x -1 ≡ $(-1)^x$-1 = 0 অথবা 1 (mod 3) (x জোড় হলে 0। অন্যথায় 1)

7 ≡ 1 (mod 3) ⇒ $7^y + 1 \equiv 1^y + 1 = 2 \ (mod\ 3\ )$

অতএব সমীকরণের বামপক্ষকে 3 দিয়ে ভাগ করে ভাগশেষ পাওয়া যাচ্ছে 0 অথবা 1 কিন্তু ডানপক্ষকে ভাগ করে ভাগশেষ পাওয়া যাচ্ছে 2. একারণে ডানপক্ষ আর বামপক্ষ কখনও সমান হতে পারে না। সুতরাং এমন কোন x , y পাওয়া সম্ভব নয়।

ওপরের সমস্যায় আমি এত কিছু থাকতে কেন mod 3 নিলাম সে প্রশ্ন জাগাটাই স্বাভাবিক। এর উত্তরটা হচ্ছে- ইন্টুইশন ! আসলে দীর্ঘদিনের অভ্যাস থেকে আমি জানি যে mod 3,4,7,8,9,11 এসব নেওয়া খুব কাজে দেয়। আর এই ফাঁকে একটা দরকারি টোটকা শিখিয়ে দিচ্ছি, মন দিয়ে শিখে নাও।

$x^2 \equiv$ 0 অথবা 1 (mod 3)

$x^2 \equiv$ 0 অথবা 1 (mod 4)

$x^3 \equiv$ 0,1 অথবা -1 (mod 7)

$x^3 \equiv$ 0,1 অথবা -1 (mod 9)

এগুলো ম্যাজিকের মতই সমস্যার গতিবিধি পাল্টে দিতে ওস্তাদ। ঠিক মত এদের কাজে লাগিও, কেমন?

কিছু সমস্যা:

১) নিচের প্রথম সংখ্যাটিকে দ্বিতীয় সংখ্যা দ্বারা ভাগ করে ভাগশেষ নির্ণয় কর:

(i) 2^{1000}, 19 **(ii)** 17^{209}, 12 **(iii)** 5^{2012}, 2012 **(iv)** 7^{603}, 22 **(v)** 37!, 41 (সাহায্য: 39! ≡ 1 (mod 41))

২) তিন, পাঁচ ও এগার দ্বারা বিভাজ্যতার নিয়মগুলো নিজে নিজে প্রমাণ কর। চেষ্টা করে দেখ তো সাতের জন্য এমন কোন নিয়ম বানানো যায় কিনা। (সাহায্য: $10^6 \equiv$ 1 (mod 7))

৩) এমন ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n নির্ণয় কর যা 101 দ্বারা বিভাজ্য এবং যার সাথে এক যোগ করে প্রাপ্ত সংখ্যাটি 103 দ্বারা বিভাজ্য।

৪) এমন সকল অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা x , y নির্ণয় কর যাতে নিচের এই সমীকরণটি সিদ্ধ হয়:

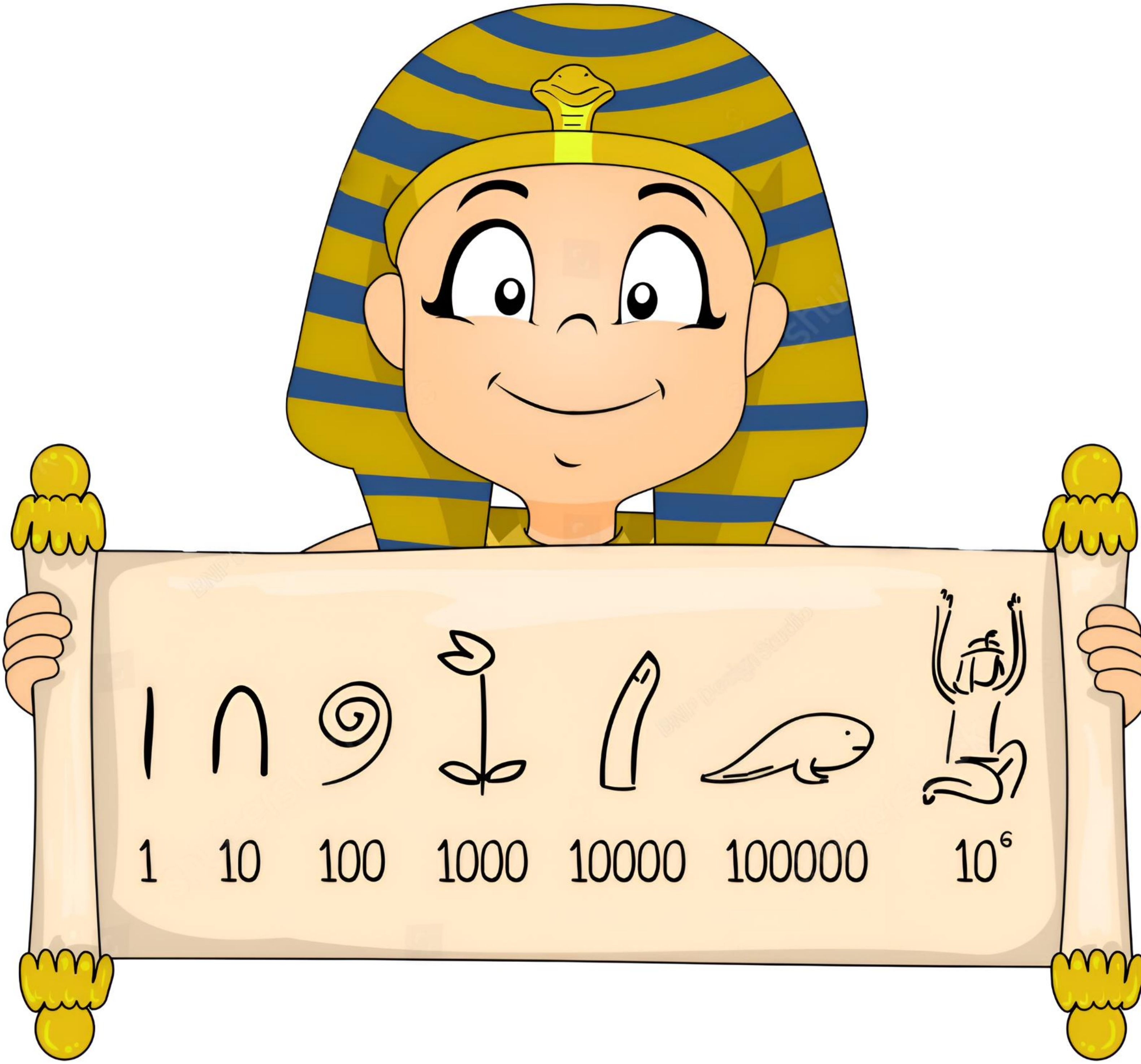
$$2^x + 1 = 3^y$$

৫) ধরা যাক, ৫ একটি পূর্ণসংখ্যা এবং m = 4a + 3. যদি m সংখ্যাটি 11 দ্বারা বিভাজ্য হয় তাহলে a^4'-কে 11 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে? (উৎস: তারিক আদনান মুন)

৬) 19 থেকে 92 পর্যন্ত সবগুলো পূর্ণসংখ্যা পাশাপাশি লিখে আরেকটি বড় পূর্ণসংখ্যা N =192021...9192 গঠন করা হল। N যদি 3^k দ্বারা বিভাজ্য হয় তবে k-র সর্বোচ্চ মান কত হতে পারে? (উৎস: তারিক আদনান মুন)

৭) একটি পরীক্ষায় তেরো জন ছাত্রী এবং b জন ছাত্র অংশ নেয়। ফল প্রকাশের পর দেখা গেল যে ছাত্র ও ছাত্রীদের প্রাপ্ত সর্বমোট নাম্বার b^2 + 106 + 17. আরও দেখা গেল ছাত্র-ছাত্রীদের নাম্বারের গড় একটি পূর্ণসংখ্যা। তাহলে ঐ পরীক্ষায় 'সর্বোচ্চ' কতজন ছাত্র অংশ নিয়েছিল? (উৎস: ড. মোহাম্মদ কায়কোবাদ)

আদীব হাসান
৯ম শ্রেণি, ময়মনসিংহ জিলা স্কুল
সদস্য, বাংলাদেশ গণিত দল ২০১২
২৩ অক্টোবর, ২০১২



নাম্বার সিস্টেম

সংখ্যা বা সংখ্যাতত্ত্ব, গণিতের অন্যতম গুরুত্বপূর্ণ একটি বিষয়। শুধু সংখ্যা নিয়ে বলতে গেলেই হয়তো ১ সপ্তাহ লেগে যাবে। কাজেই তোমরা সকলেই বুঝতেই পারছ এটি গণিতের কত গুরুত্বপূর্ণ একটি টপিক। সংখ্যার ব্যবহার শুরু হয়েছে সেই আদিমযুগ থেকে। তবে এখনো এটিই গণিতের অন্যতম প্রধান বিষয়। এর বিভিন্ন ভাগ রয়েছে। তার মধ্যে আছে নাম্বার সিস্টেম, অনুসমতা, অসমতা, ত্রিকোণমিতি ইত্যাদি। তার মধ্যে নাম্বার সিস্টেম কিন্তু অন্যতম একটি বিষয় হয়ে দাড়িয়েছে বর্তমানে। এখন তোমরা অনেকেই ভাবতে পারো, "আচ্ছা নাম্বার সিস্টেম বিষয়টা কি? নাম্বার সিস্টেমের প্রয়োজনীয়তা-ই বা কি?" অনেকের মনেই হয়তো এমন নানা প্রশ্ন ঘুরতে থাকে তাইনা? চলো এসব নিয়েই আজকে আলোচনা করা যাক। তো প্রথমেই নাম্বার সিস্টেম নিয়ে কিছু তথ্য জেনে নেওয়া যাক।

- নাম্বার সিস্টেমকে আমরা প্রধানত চার ভাগে ভাগ করলেও টারনাই, কুইনারি, সেনারি –এর মতো আরও কিছু সংখ্যা পদ্ধতি আছে।
- সংখ্যা পদ্ধতির জনক বলা হয় আর্যভট্টকে।
- খ্রিষ্টপূর্ব ৩০০০ অব্দে মিশরের এক চিত্রলিপিতে সংখ্যাপদ্ধতি তুলে ধরা হয়েছিল।
- সাধারণত কোন একটি সংখ্যাকে ১ম বন্ধনীর ভেতর রেখে বন্ধনীর নিচে ছোট করে সাবস্ক্রিপ্ট আকারে সেটি কত ভিত্তিতে আছে তা বোঝানো হয়। যেমনঃ $(100)_{10}$; এখানে ১০০ সংখ্যাটি ১০ ভিত্তিতে বা ডেসিমাল সংখ্যা পদ্ধতিতে লেখা আছে।

সাধারণত আমরা যে সকল অঙ্ক বা সংখ্যা লিখে থাকি তার সবই ডেসিমাল বা ১০ ভিত্তিক সংখ্যা পদ্ধতিতে। এটি শুধু বহুল ব্যবহৃতই নয় বরং বেশি প্রচলিতও বটে। তো তোমাদের সকলের মনেই প্রশ্ন আসতে পারে যে অন্যান্য অনেক সংখ্যা পদ্ধতিই তো রয়েছে তবে ডেসিমাল সংখ্যা পদ্ধতি এত প্রচলিত কেন হলো, তাই না। কিন্তু মজার ব্যপার হলো অন্যান্য সকল বিষয়বস্তুর মতো এরও সুনির্দিষ্ট কারণ রয়েছে। প্রাচীন কালে মানুষ খুব বেশি শিক্ষিত ছিল না। তবে দৈনন্দিন চাহিদার প্রেক্ষিতে মানুষের গণনার প্রয়োজন পরত। তো তারা তো সংখ্যা নিয়ে এতো জানত না। প্রচলিত আছে যে তারা দাগ কেটে বা হাতের আঙ্গুল গণনা করে সকল হিসাব রাখত। আমরা তো সবাই জানি যা আমাদের দুই হাত মিলিয়ে মোট দশটি আঙ্গুল। তো সেখান থেকেই এই দশ ভিত্তিক সংখ্যার প্রথম উৎপত্তি বলে ধারণা করেন বেশিরভাগ বিশেষজ্ঞ। ১০ ভিত্তিক সংখ্যা পদ্ধতিতে মোট ১০টি প্রতীক বা অংক রয়েছে যার সাহায্যে আমরা সকল সংখ্যা বানিয়ে থাকি। তোমরা সকলে নিশ্চই এতক্ষণে বুঝে গিয়েছো এগুলো কি। হ্যাঁ তুমি হয়তো সঠিকই ভেবেছ। এগুলো হলো ০, ১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬, ৭, ৮, ৯ –এই দশটি অংকের সাহায্যে দশ ভিত্তিক সকল সংখ্যা লেখা হয়ে থাকে। যেমনঃ $(435)_{10}$, $(23)_{10}$

এবার আমরা বাইনারি নিয়ে কিছু তথ্য জানব এবং ডেসিমাল থেকে বাইনারিতে একটি সংখ্যাকে রূপান্তর করব।

বাইনারি হলো দুই ভিত্তিক সংখ্যা পদ্ধতি। অর্থাৎ, মাত্র দুইটি অঙ্ক ব্যবহার করেই বাইনারিতে সকল সংখ্যা লেখা হয়ে থাকে। এই দুইটি হলো ১ ও ২। আমরা সকলেই হয়তো শুনেছি যে বাইনারি হলো কম্পিউটারের ভাষা। হ্যাঁ, তুমি কিছু ভুল শোননি। আমরা যা লিখি বা বলি কম্পিউটার সেগুলিকে বাইনারিতে রূপান্তর করে তার আগে বুঝতে পারে না। এজন্য বাইনারিকে প্রযুক্তির ভাষাও বলা হয়ে থাকে। তো এবার আমরা ডেসিমাল থেকে কিভাবে বাইনারিতে একটি সংখ্যাকে রূপান্তর করব তা দেখে নেই।

ধরো, ১২৩৪৫ সংখ্যাটি ১০ ভিত্তিতে রয়েছে $(১২৩৪৫)_{১০}$। এখন একে আমরা ২ ভিত্তিতে রূপান্তর করব।

ভাজক	ভাগফল	ভাগশেষ
২	১২৩৪৫ (১ম বারে যেটি দেয়া আছে সেটি নিব)	১
২	৬১৭২	০
২	৩০৮৬	০
২	১৫৪৩	১
২	৭৭১	১
২	৩৮৫	১
২	১৯২	০
২	৯৬	০
২	৪৮	০
২	২৪	০
২	১২	০
২	৬	০
২	৩	১
২	১	১

তীর চিহ্নের দিক দেখে তোমরা অনুমান করেই ফেলেছ যে কিছু একটাকে নিচ থেকে উপরে সাজাতে হবে। যদি তুমি এটা ভেবেই থাকো তবে ভুল কিছু ভাবনি। ভাগশেষ গুলোকে নিচ থেকে উপরে সাজালে আমরা ১ ও ০ –এর সাহায্যে যে সংখ্যাটি লিখব সেটিই হবে ১২৩৪৫ –এর বাইনারি। তো চলো লিখে ফেলি।

$$(১২৩৪৫)_{১০} = (১১০০০০০০১১১০০১)_{২}$$

তো এবার কিভাবে এটা করা হলো সেটা একটু বুঝিয়ে দেই। প্রথমেই আমাদের জানতে হবে কোন সংখ্যা পদ্ধতিতে কতটি অংক বা ভিত্তি আছে। যেমনঃ ডেসিমালের ১০, বাইনারির ২, অকটালের ৮, হেক্সাডেসিমালের ১৬ ইত্যাদি। তো এখানে ভাজক হিসেবে আমরা সেই ঘাতকেই রেখে দিব। যেহেতু আমাদের বাইনারি ২ ঘাতের হবে তাই ভাজক দুই হবে। ভাজ্য হবেই সেই সংখ্যাটি যাকে আমরা রূপান্তর করব এবং ২য় বার থেকে ভাজ্য হবে আমাদের ভাগফল। আর ভাগশেষকে আমরা আরেকটি ঘরে লিখেছি। এবং সর্বশেষ ভাগশেষগুলোকে নিচ থেকে উপরে সাজিয়ে লিখতে হবে। তাহলেই আমরা বাইনারি পেয়ে যাব।

এবার আমরা কিছু পদ্ধতির নাম ও তারা কতো ঘাতের তা দেখে নেই,

নাম্বার সিস্টেমের নাম	ঘাত	অংক বা প্রতীক
বাইনারি	২	১,০
কুইনারি	৫	০,১,২,৩,৪
সেনারি	৬	০,১,২,৩,৪,৫,৬
অকটাল	৮	০,১,২,৩,৪,৫,৬,৭
ডেসিমাল	১০	০,১,২,৩,৪,৫,৬,৭,৮,৯
হেক্সা ডেসিমাল	১৬	০,১,২,৩,৪,৫,৬,৭,৮,৯,A,B,C,D,E

এই সকল ক্ষেত্রেই ডেসিমাল থেকে সেই পদ্ধতিতে রূপান্তর প্রক্রিয়া একই। শুধু ভাজক হবে সেই পদ্ধতির ঘাত। তোমরা হয়তো খেয়াল করেছ হেক্সা ডেসিমালে A – E পর্যন্ত আছে। এখন আমরা দেখব যে এগুলি আমরা কখন ব্যবহার করব।

একটা কথা ভাবো তো ? হেক্সাডেসিমালের ক্ষেত্রে আমাদের ভাগশেষ ০-১৫ পর্যন্ত আসতে পারে, তবে আমদের কাছে ০-৯ পর্যন্ত অংক রয়েছে। তাহলে ১১-১৫ এর মধ্যে বা তাদের সমান ভাগশেষ আসলে আমরা কি করব? হ্যাঁ, তখনই আমরা এই ব্যবহার করব। নিচের ছকে কখন কোনটি ব্যবহার করব তা দেওয়া হলোঃ

ভাগশেষ	**ব্যবহৃত অক্ষর**
১১	A
১২	B
১৩	C
১৪	D
১৫	E

তো তোমরা হয়তো ভাবছ দশমিক সংখ্যাও কি একই পদ্ধতিতে রূপান্তরিত হবে। উত্তর হলো না। সেজন্য আমরা আরেকটি পদ্ধতি ব্যবহার করব। তো চলো সেটি দেখে নেয়া যাক।

আমরা এখন $(০.৫৪)_{১০}$ – কে বাইনারিতে রূপান্তর করব।

পূর্ণসংখ্যা (দশমিকের আগের)	দশমিক সংখ্যা (দশমিকের পরের)	যত দ্বারা গুণ করব
০	.৫৪	২
১	.০৮	২
০	.১৬	২
০	.৩২	২
০	.৬৪	২
১	.২৮	২
০	.৫৬	২
১	.১২	২
০	.২৪	২
০	.৪৮	২
০	.৯৬	২
১	.৯২	২
১	.৮৪	২

এক্ষেত্রে তোমরা দেখতে পারছ যে এটিকে মেলানো সম্ভব হচ্ছে না। অর্থাৎ, দশমিকের অঙ্ক ০ আসছে না। এক্ষত্রে আমরা একটি পদ্ধতি অনুসরণ করে লিখব আর ছক দেখে বুঝতেই পারছ যে পূর্ণসংখ্যার ক্রম (উপর থেকে নিচ) অনুযায়ী সাজিয়ে লিখলেই আমরা বাইনারি পেয়ে যাব।

$$(০.৫৪)_{১০} = (০১০০০১০১\ldots)_{২}$$

তো এভাবে কিছুটা লিখে তিনটা ফোটা দিলেই যথেষ্ট। তবে সব সময় যে এমনটা হবে তা কিন্তু নয়। যদি কখনো এরকম না হয়ে মিলে যায় তবে সেটি লিখে আর ফোটা দেওয়ার প্রয়োজন পরবে না।

এতক্ষণ আমরা শুধু ডেসিমাল থেকে অন্য সংখ্যা পদ্ধতিতে কিভাবে রূপান্তর করা যায় তা দেখলাম। এবার আমরা দেখব কিভাবে অন্য সংখ্যা পদ্ধতি থেকে ডেসিমালে আসা যায়। কিছুক্ষণ আগেই আমরা পেয়েছিলাম যে, (১২৩৪৫)$_{১০}$ = (১১০০০০০০১১১০০১)$_{২}$ । তাই এবার ১১০০০০০০১১১০০১ -কে আমরা ডেসিমালে নিয়ে দেখব যে আমাদের বাইনারিতে রূপান্তর সঠিক আছে কিনা।

এজন্য আমরা একটি সূত্র ব্যভার করবঃ

যত ভিত্তিতে আছে$^{\text{(সেখান আর যতগুলি অংক বাকি)}}$ × সেই স্থানে থাকা অংক / স্বকীয় মান

প্রতিটি স্থানের অংকের জন্য এটি হিসাব করতে হবে। তারপর তা যোগ করে দিতে হবে। তবে তোমরা বুঝতেই পারছ যে যদি সে স্থানের স্বকীয় মান ০ হয় তবে সেটির আর হিসাব করার দরকার হবে না কারণ ০ দিয়ে যেকোন কিছু গুণ করলে তা ০-ই হবে। তো করে দেখি চলোঃ-

১ এর জন্য (সর্ববাম থেকে) – ২ (বাইনারি দুই ভিত্তিক সংখ্যা পদ্ধতি)^{১৩} × ১ = ৮১৯২

১ এর জন্য (পরবর্তী বাম থেকে) – ২^{১২} × ১ = ৪০৯৬

১ এর জন্য (পরবর্তী) – ২^{৫} × ১ = ৩২

১ এর জন্য (পরবর্তী) – ২^{৪} × ১ = ১৬

১ এর জন্য (পরবর্তী) – ২^{৩} × ১ = ৮

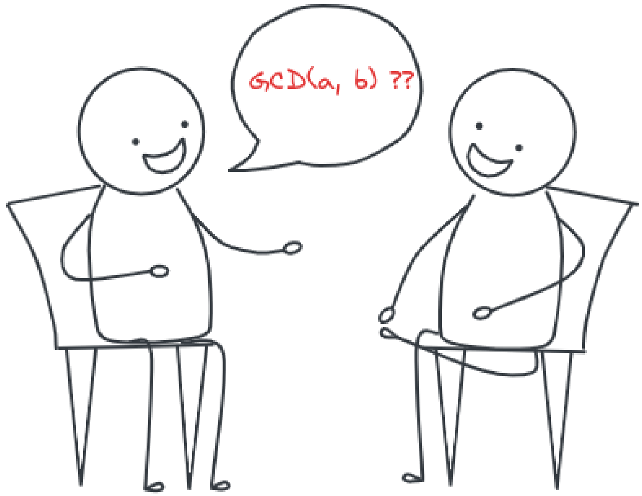
১ এর জন্য (পরবর্তী) – ২^{০} × ১ = ১

এবার এগুলি যোগ করতে হবে। (৮১৯২ + ৪০৯৬ + ৩২ + ১৬ + ৮ + ১) = ১২৩৪৫

তাহলে আমাদের হিসাব ঠিক আছে তাই তো!!!

এখন যদি তোমাকে বলা হয় হেক্সা ডেসিমাল থেকে একটি সংখ্যা বাইনারিতে নিতে তখন তুমি কি করবে বলতো??? তখন আমরা এভাবে আগে সেই সংখ্যাকে ডেসিমালে নিয়ে নিব তারপর সেখান থেকে এটিকে বাইনারিতে রূপান্তর করব (হেক্সা ডেসিমালের A,B,C,D,E এর স্বকীয় মান হবে যাদের পরিবর্তে এদের লেখা হয়। অর্থাৎ, ১১ - ১৫) । **বেশ মজার না !!!**

মোঃ ইব্রাহীম
অষ্টম শ্রেণী
খুলনা জিলা স্কুল



ইউক্লিডিয়ান অ্যালগরিদম

Hello, সমান্তরাল সৈনিকেরা! এই অংশে আমরা বীজগণিতের মজার একটি সমস্যার সমাধান করবো এবং সেই সাথে দারুণ একটি Theory শিখে নিব।

আমাদের সমস্যাটি হলোঃ

gcd(3768,1701) = 3768x + 1701y হলে, x ও y এর মান কত?

সমাধানঃ

আমাদের সমস্যাটি যেহেতু gcd বা গ.সা.গু. নিয়ে, তাই সমাধান করার পূর্বে আমরা গ.সা.গু. নির্ণয়ের পদ্ধতি নিয়ে একটু আলোচনা করা হবে।

আমরা সবাই জানি,

ভাজ্য = ভাজক*ভাগফল + ভাগশেষ

ভাজ্য = a, ভাজক = b, ভাগফল = p এবং ভাগশেষ = q বিবেচনা করে পাই,

$$a = b*p + q$$

আমাদের সমস্যাটি সমাধান করার জন্য আমরা প্রচলিত নয় তবে অসাধারণ এমন এক পদ্ধতিতে গ.সা.গু. নির্ণয় করবো।

এই নিয়মে আমরা a = b*p + q লাইনটিই বারবার ব্যবহার করবো।

শুধু পরের লাইনে a এর স্থলে b এবং b এর স্থলে q বসবে। অর্থাৎ,পরের লাইনে ভাজ্য ও ভাজকের স্থলে যথাক্রমে আগের লাইনের ভাজক ও ভাগশেষ বসবে।

ভাবে বারবার করতে থাকলে আমরা কোনো এক লাইনে ভাগশেষ বা q এর মান পাবো 0 ।

যে লাইনে q এর মান 0 তার আগের লাইনের q এর মানই হবে নির্ণেয় গ.সা.গু.। অর্থাৎ, x তম লাইনে q = 0 হলে,গসাগু হবে (x-1) তম লাইনের q এর মান।

নিয়মটি আরো পাকাপোক্তভাবে বোঝার জন্য আমরা gcd(3768,1701) নির্ণয় করিঃ

i) 3768 = 1701*2 + 366

ii) 1701 = 366*4 + 237

iii) 366 = 237*1 + 129

iv) 237 = 129*1 + 108

v) 129 = 108*1 + 21

vi) 108 = 21*5 + 3

vii) 21 = 3*7 + 0

এখানে শেষ লাইন থেকে পাই,

21 = 3*7 + 0

এর আগের লাইন,

108 = 21*5 + 3

এ লাইনে q = 3

তাই gcd(3768,1701) = 3

এবার আমরা সমস্যার ডানপক্ষ নিয়ে কাজ করবো। মজার ব্যপার হলো পূর্বের লাইনগুলো দিয়েই আমরা ডানপক্ষ সমাধান করতে পারি। এখানে লাইন নাম্বারকে সমীকরণ নাম্বার হিসেবে ব্যবহার করবো।

(vi) লাইন থেকে পাই,

3 = 108 + 21(-5)

= 108 + (129-108)(-5).

[(v) থেকে ; 21 = 129 - 108]

= 108 + 129(-5) + 108(5)

= 129(-5) + 108(6)

= 129(-5) + (237-129)(6). [(iv) থেকে]

= 129(-5) + 237(6) + 129(-6)

= 237(6) + 129(-11)

= 237(6) + (366-237)(-11). [(iii) থেকে]

= 237(6) + 366(-11) + 237(11)

= 366(-11) + 237(17)

= 366(-11) + (1701-366*4)(17). [(ii) থেকে]

= 366(-11) + 1701(17) + 366(-68)

= 1701(17) + 366(-79)

= 1701(17) + (3768-1701*2)(-79) [(i) থেকে]

= 1701(17) + 3768(-79) + 1701(158)

= 3768(-79) + 1701(175)

তাহলে,

3 = gcd(3768,1701) = 3768(-79) + 1701(175)

আমাদের মূল সমীকরণের কথা মনে আছে?

gcd(3768,1701) = 3768x + 1701y

দুটি তুলনা করলে পাওয়া যায়,

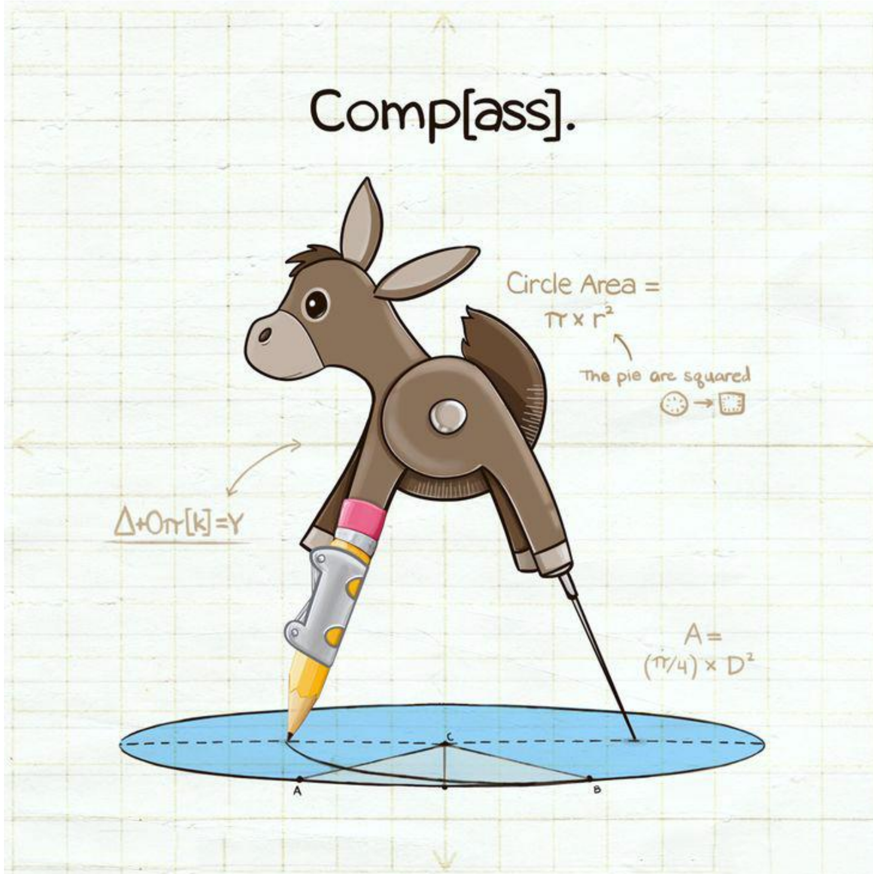
x = -79 y = 175

এখানে গ.সা.গু. নির্ণয়ের পদ্ধতিটি হলো **Euclidean Algorithm** এবং গ.সা.গু. থেকে x ও y এর মান নির্ণয়ের প্রক্রিয়াটি ছিল **Extended Euclidean Algorithm.**

Extended Euclidean Algorithm এ বলা হয়,

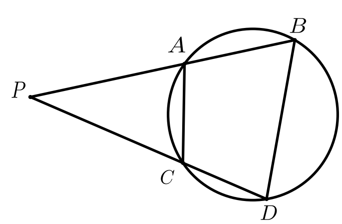
দুটি পূর্ণসংখ্যা a ও b এর গ.সা.গু. gcd(a,b) হলে অবশ্যই এমন পূর্ণসংখ্যা x ও y আছে যেন ,

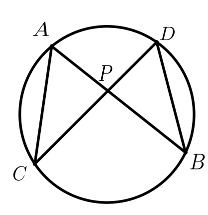
gcd(a,b) = ax + by.



পাওয়ার অফ পয়েন্ট থিওরেম

উপপাদ্য ১.১ (পাওয়ার অব পয়েন্ট উপপাদ্য) : মনে করি, ω একটি বৃত্ত এবং P যেকোনো একটি বিন্দু। P বিন্দুগামী একটি সরলরেখা ω কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।





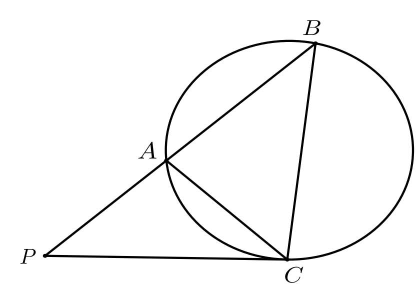
P বিন্দুগামী অপর একটি সরলরেখা ω কে যথাক্রমে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

প্রমাণঃ A, B, C, D বিন্দুগুলো বৃত্তস্থ হওয়ায় $\angle PAC = \angle PDB$ এবং $\angle PCA = \angle PBD$। সুতরাং, ΔPAC এবং ΔPDB পরস্পর সদৃশ। তাই

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

একটি বিশেষ ক্ষেত্র হলো, যখন P বিন্দুগামী একটি রেখা ω কে শুধুমাত্র C বিন্দুতে স্পর্শ করে।



এক্ষেত্রে Alternate Segment Theorem থেকে আমরা জানি, $\angle PBC = \angle ABC = \angle ACP$। অর্থাৎ $\Delta PBC \sim \Delta PCA$। তাই

$$\frac{PC}{PA} = \frac{PB}{PC} \Rightarrow PC^2 = PA \cdot PB$$

উপপাদ্য ১.২ (পাওয়ার অব পয়েন্ট-এর বিপরীত উপপাদ্য) : মনে করি, একই সমতলে অবস্থিত চারটি ভিন্ন ভিন্ন বিন্দু হলো A, B, C, D। AB ও CD পরষ্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। P বিন্দুটি হয় AB এবং CD উভয় রেখাংশেই অবস্থিত, অথবা কোনো রেখাংশেই অবস্থিত নয়। A, B, C, D বিন্দুগুলো বৃত্তস্থ হবে যদি এবং কেবল যদি $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ হয়।

__প্রমাণঃ__ যদি A, B, C, D বিন্দুগুলো বৃত্তস্থ হয় তবে এটি সত্যি তা আগেই দেখানো হয়েছে। এখন ধরি, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$। প্রমাণ করতে হবে যে, A, B, C, D বিন্দুগুলো একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত। P বিন্দুটি উভয় রেখাংশেই থাকুক বা কোনো রেখাংশেই না থাকুক, উভয় ক্ষেত্রেই কিন্তু $\angle APC = \angle DPB$ এবং $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ থেকে পাই, $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$। অর্থাৎ $\Delta PAC \sim \Delta PDB$ বা, $\angle PAC = \angle PDB$। অর্থাৎ A, B, C, D বিন্দুগুলো একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত।

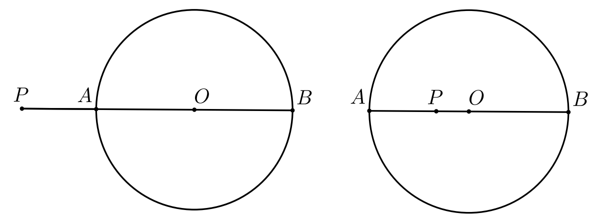
আমরা Γ বৃত্তের সাপেক্ষে P বিন্দুর পাওয়ারকে $\mathrm{Pow}_\Gamma(P)$ দিয়ে প্রকাশ করবো।

এবার আমরা প্রমাণ করবো যে, O কেন্দ্র এবং r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্ত ω এর জন্য, $\mathrm{Pow}_\omega(P) = OP^2 - r^2$। $\mathrm{Pow}_\omega(P)$ ধনাত্মক হবে যদি P বিন্দুটি বৃত্তের বাইরে থাকে, অন্যথায় ঋণাত্মক হবে।

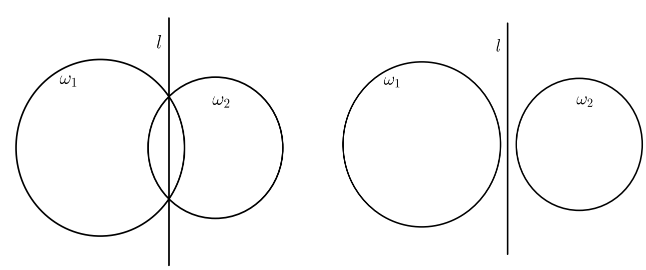
__প্রমাণঃ__ OP রেখা ω কে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে আমরা জানি, $\pm PA \cdot PB = (OP - OA)(OP + OB) = (OP - r)(OP + r) = OP^2 - r^2 = \mathrm{Pow}_\omega(P)$।

দুইটি ভিন্ন কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের Radical Axis হলো এমন সকল বিন্দুর একটি সেট যাদের সাপেক্ষে উভয় বৃত্তের পাওয়ার একই। এমন সকল বিন্দু প্রকৃতপক্ষে একই সরলরেখায় অবস্থিত। এই অসীম সরলরেখাই Radical Axis নামে পরিচিত। দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র O_1, O_2 এবং এদের র‍্যাডিকাল অ্যাক্সিস l হলে, $O_1O_2 \perp l$।



উপপাদ্য ১.৩ (র‍্যাডিকাল অ্যাক্সিস-Radical Axis Theorem) : মনে করি, ω_1 এবং ω_2 বৃত্তের কেন্দ্র যথাক্রমে $O_1 = (a, 0)$ এবং $O_2 = (b, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r_1 এবং r_2। $P = (x, y)$ এমন একটি বিন্দু যেন $\mathrm{Pow}_{\omega_1}(P) = \mathrm{Pow}_{\omega_2}(P)$ অর্থাৎ, $O_1P^2 - r_1^2 = O_2P^2 - r_2^2$। এবার স্থানাঙ্ক জ্যামিতি ব্যবহার করে আমরা পাই,

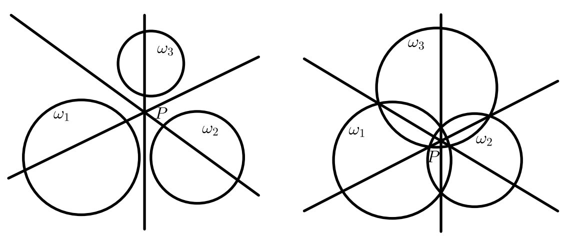


$$
\begin{aligned}
O_1P^2 - r_1^2 &= O_2P^2 - r_2^2 \\
&\Rightarrow (x-a)^2 + y^2 - r_1^2 \\
&= (x-b)^2 + y^2 - r_2^2 \\
\Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 - r_1^2 & \\
&= x^2 - 2bx + b^2 - r_2^2 \\
\Rightarrow (-2a - 2b)x + a^2 - b^2 - r_1^2 + r_2^2 & \\
&= 0 \\
\Rightarrow x = \frac{a^2 - b^2 - r_1^2 + r_2^2}{2a + 2b} &
\end{aligned}
$$

যেহেতু, $-2a - 2b \neq 0$, তাই এটি একটি সরলরেখার সমীকরণ যা x-অক্ষের উপর লম্ব।

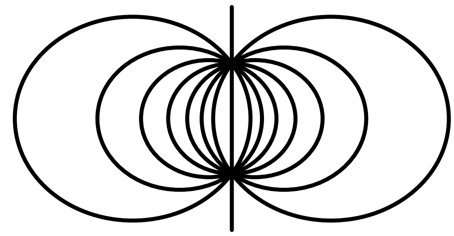
তিনটি বৃত্তের ক্ষেত্রে এদের র‍্যাডিকাল অ্যাক্সিসগুলো একটি বিন্দু দিয়ে যায় অথবা পরষ্পর সমান্তরাল হয়। একাধিক বৃত্তের র‍্যাডিকাল অ্যাক্সিসগুলো সমান্তরাল হবে যদি তাদের কেন্দ্রগুলো সমরৈখিক হয়।

উপপাদ্য ১.8 (Radical Center) : তিনটি ভিন্ন ভিন্ন সমরৈখিক নয়, এমন কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের র‍্যাডিকাল অ্যাক্সিসগুলো একটি সাধারণ বিন্দু দিয়ে যায়। এই বিন্দুটিকে বলা হয় বৃত্ত তিনটির **Radical Center**।



<u>প্রমাণঃ</u> মনে করি, তিনটি ভিন্ন ভিন্ন সমরৈখিক নয় এমন কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত $\omega_1, \omega_2, \omega_3$। ω_i এবং ω_j এর র‍্যাডিকাল অ্যাক্সিস-কে আমরা l_{ij} দিয়ে প্রকাশ করবো। ধরি, $P = l_{12} \cap l_{23}$। তাহলে, $Pow_{\omega_1}(P) = Pow_{\omega_2}(P)$ এবং $Pow_{\omega_2}(P) = Pow_{\omega_3}(P)$। এই দুটি সমীকরণ থেকে পাই, $Pow_{\omega_1}(P) = Pow_{\omega_3}(P)$। অর্থাৎ, P বিন্দুটি l_{31} এর উপর অবস্থিত।

তিন বা ততোধিক বৃত্তের র‍্যাডিকাল অ্যাক্সিস একই হলে তাদেরকে **Coaxial Circle** বলা হয়। নিচে **Coaxial Circle** এর একটি উদাহরণ দেয়া হলোঃ



Equation Traker (ছদ্ম নাম)

তোমাদের প্রাক্টিসের জন্য আমার বানানো কিছু নতুন নতুন প্রশ্ন দিলাম। নিজেরা চেষ্টা করে এগুলোর সমাধান বের করবে। গণিত অলিম্পিয়াডে ভালো করার মূল হাতিয়ার হলো বেশি বেশি প্রাক্টিস করা। তুমি যত বেশি বেশি প্রাক্টিস করবে ততো বেশি তোমার প্রশ্ন সমাধান করার দক্ষতা বৃদ্ধি পাবে। বিগত বছরের প্রশ্ন গুলোর সমাধান পেতে "Bangladesh Olympiad Practice" ইউটিউব চ্যানেল সাবস্ক্রাইব করতে ভুলো না যেন!

-মেজবাতুর রহমান নিলয়

scan me

1. নিলয় গণিত অলিম্পিয়াড প্রস্তুতির জন্য "Bangladesh Olympiad Practice" নামে একটি চ্যানেল খোলে। চ্যানেলের সাবস্ক্রাইব একসময় 7117 হলো যা একটি প্যালিনড্রোম সংখ্যা। নিলয় মজা করে একটি মৌলিক সংখ্যা তার চ্যানেলের সাবস্ক্রাইব সংখ্যার সাথে যোগ করে দেখলো যোগফলও একটি প্যালিনড্রোম সংখ্যা। তার যোগকৃত ক্ষুদ্রতম মৌলিক সংখ্যাটি কত?

(Niloy opens a channel named "Bangladesh Olympiad Practice" for Math Olympiad preparation. The channel's subscribers were 7117 which is a palindrome number. Niloy jokingly added a prime number to the number of subscribers to his channel and found that the sum was also a palindrome number. What is the smallest prime number added to it?)

2. বাংলাদেশের বিজয় দিবস 16 ডিসেম্বর। 1971 সালের 16ই ডিসেম্বর বাংলাদেশ বিজয় অর্জন করে।

16-12-1971

একসাথে লিখলে 16121971 যা একটি মৌলিক সংখ্যা। নিলয় বিশাল বড় বোর্ডে 16 ডিসেম্বর, 1971 থেকে 16 ডিসেম্বর, 2023 পর্যন্ত সকল তারিখ একসাথে লিখে (16121971 এর মতো করে) যতগুলো মৌলিক সংখ্যা পেল সেগুলো মুছে দিল। বোর্ডে থাকা অবশিষ্ট সংখ্যা গুলোর যোগফল বের করে সে যোগফলের অংক গুলোর সমষ্টি বের করলো। এভাবে সে ততক্ষণ পর্যন্ত অংক গুলোর সমষ্টি বের করতে থাকলো যতক্ষণ না সে এক অংক বিশিষ্ট সংখ্যা পাচ্ছে। তাহলে তুমি কি বলতে পারবে তার সেই এক অংক বিশিষ্ট সংখ্যাটি কতো হতে পারে?

(The Victory Day of Bangladesh is celebrated on December 16. Bangladesh achieved victory on December 16, 1971.

16-12-1971

Written together is 16121971, which is a prime number. Niloy wrote all the dates from December 16, 1971 to December 16, 2023 together (as in 16121971) on a huge board and then he erased all the prime numbers that he got on the board. Then he calculated the sum of the remaining numbers on the board after erasing prime numbers and then calculated the total sum of digits of the sum. In this way he continued summing the digits until he got a single-digit number. So can you tell what that one-digit number can be?)

3. নিলয় সকালে ঘুম থেকে উঠতে পারে না। সে তার ফোনে দেওয়া এলার্ম বন্ধ করে আবার ঘুমিয়ে পড়ে। তাই সে এলার্ম দেওয়ার জন্য একটি আজব ডিজিটাল ঘড়ি (24 Hours Format) কিনে আনলো। তার ঘড়িতে কোনো ভাবে প্যালিনড্রোম সংখ্যা বিশিষ্ট সময় আসলেই এলার্ম বেজে উঠে। যেমন তার ঘড়িতে 11:11 বাজলে এলার্ম বেজে ওঠে। তাহলে একদিনে নিলয়ের ঘড়িতে মোট কতবার এলার্ম বাজবে?

(Niloy cannot wake up in the morning. He turns off the alarm on his phone and goes back to sleep. So, he buys a strange digital clock (24 Hours Format) to set the alarm. The alarm actually rings when his watch contains a palindrome number. For example, when the time is 11:11, the alarm rings. So, how many times will the alarm ring on Niloy's clock in a day?)

4. নিলয় 31 December, 2023 রাত 12:00 am এ দেখলো এই তারিখটি সংখ্যায় প্রকাশ করতে দাড়ায় 31122023 যা একটি মৌলিক সংখ্যা। নিলয় তখন এরকম পরবর্তী মৌলিক সংখ্যা বিশিষ্ট তারিখ আসতে আরো কত দিন বাকি আছে তা নির্ণয় করলো। তুমি কি বলতে পারবে তার নির্ণয় করা বাকি দিনের সংখ্যাটি কত ছিল?

(At 12:00 am on 31 December, 2023, Niloy found that the date could be expressed as the number 31122023, which is a prime number. Then he sought to find out the remaining days until the next such prime number date. Can you find out the remaining days that he found?)